創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

－中高６カ年から大学へ－

（５年計画の５年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
須田　　学・更科　元子・鈴木　清夫
須藤　雄生・三井田裕樹・町田多加志
吉崎　健太

創造的な教材・指導法及びカリキュラムの開発

ー中高６カ年から大学へー

（５年計画の５年次）

筑波大学附属駒場中・高等学校　数学科
須田　　学・更科　元子・鈴木　清夫
須藤　雄生・三井田裕樹・町田多加志
吉崎　健太

要約

教材開発は，基本姿勢として生徒と教員の相互作用で築き上げるものと考えられる。毎時の授業のなかで，教員が提示した中心課題に対し，生徒が自らの発想や，解決にいたる道筋，さらなる発展課題などを見つけ，発表する。教員は，生徒の発想を拾い上げ，生徒同士の議論を整理し，さらに課題を洗練させる。このような創造的な教材とそれに対する生徒と教員の相互作用は,本校の数学教育において長年中心的な役割を果たしている。

2002年度からスーパーサイエンスハイスクール(SSH)に指定されている本校で，数学科は上記の考えに立ちながら，大学や実社会での学びにも繋がる中高の教材・指導法及びカリキュラムを開発すべく研究を行っている。開発した教材は78に及び，教員研修会の開催をはじめ各種SSH事業の実施を通し，さらなる研究の充実を図っている。

キーワード：サイエンスコミュニケーション，中高大院連携

1. はじめに

2013（平成 25）年度入学生から全面実施された新学習指導要領は，数学・理科においては 2012 年度から先行実施されており，2015 年 3 月に最初の卒業生を出した。このような情勢の中，数学教育への関心は日増しに高まりを見せている。それは，本校における数学科教員研修会の，全国からの参加状況をみても実感するところである。

本校数学科では，かねてより，筑波大学をはじめ，他大学の数学関係者の協力も得ながら，大学や社会での学びにつながる数学教材の開発および指導法の研究を行っている。特に，スーパーサイエンスハイスクール（以下「SSH」と略する）の指定を受けて以来，中長期的な見通しをもち，これらの研究を推進してきた。

2002 年度から指定を受けた 1 期目の研究『先駆的な科学者・技術者を育成するための中高一貫カリキュラム研究と教材開発』では，大学での学びにつながる数学に注目し，特に「統計」（集団の特徴を掴む考え方や手法）および「微分方程式」（微小な変化から関数の特徴を捉える考え方）に関する教材開発と授業実践を行った。その後，2007 年度より指定を受けた 2 期目の研究『国際社会で活躍する科学者・技術者を育成する中高一貫カリキュラム研究と教材開発』では，これら以外の分野を含めて，生徒も教員も興味を持って取り組めるような魅力的で有効な教材を開発し，中高一貫カリキュラムの一層の充実を目指した。

2012 年度以降も『幅広い教養と強い探究心をもつ国際性豊かな最先端研究者を育成する高大連携プログラムの研究と実施』をテーマに，継続して教材の開発に取り組んでいる。

その結果，これまでに 78 の教材を開発し，カリキュラムに配置するとともに，教員研修会などで発表している。また，教材・カリキュラム開発以外に，生徒の数学への興味関心を高めるための「特別講座」，サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指した「課題研究」（学校設定科目），数学オリンピックや数学科学研究部など生徒の数学的活動の支援等を実施している。以下，その取り組みを報告する。

Creative Teaching Materials, Method and the Development of the Curriculum
- From Six Years of a Junior and Senior High School to the University -

2. 今年度（2016 年度）の研究

2.1. 教材・カリキュラムの開発

本校における教材開発の基本姿勢は,「生徒と教員の相互作用で築き上げる」ものであると言える。教員は,これまでに蓄積された経験，数学教育の実践における先行研究などに，自らの感性も交えて，毎時の授業のなかで，生徒が考えるに値する素材を中心課題として提示する。生徒はそれに反応し，自らの発想や，解決にいたる道筋, さらなる発展課題などを見つけていく。その過程では，自らの考えを発表したり，それに対する他の生徒の反応をもとに，足りない部分を補ったりといった活動も行われる。教員は，そこで得られた生徒の発想や，生徒同士で高まった議論を整理し，授業のなかで生徒の思考水準を高めていくとともに，さらに課題を洗練させていく。またときには, 週に１度行われる本校数学科の教科会においてその事例が報告, 共有され, 教員同士でも相互に教材を深めていく。この繰り返しが本校数学科における教育実践の中心であり, また開発された教材はその成果であると位置づけられよう。

本校数学科では，専任教員がそれぞれ同じ生徒をできるだけ継続して担当し，中高６年間さらに大学での学びをも見通した授業を行うように努めている。そこでの共通した目標である『いろいろな現象や事柄に潜む仕組みや法則を数学的に解析し, その本質を捕まえ，そしてそれらを表現できるようになる』ことも，本校における数学科の教育実践を端的に表している。例えば，入学してすぐの中学１年生には，とにかく自分の考えを発表させることに主眼をおいた指導を行い，ときには生徒間で議論をさせたり，発展課題をレポートにまとめたりといった活動を授業の中に取り入れている。これらの活動が，とかく中学受験を経験した子どもたちにありがちな「問題を解き，正解に到達したら勝ち，終わり」という価値観からの脱却を促し,「考える過程とそれを表現することこそが数学の学習の中心である」という意識の涵養につながっていく。また，一方で教員は，その過程で生み出される「生徒自身によって表現された数学」を吸い上げて授業に還元しながら，生徒とともに教材をみがき，整理して形に残すことが務めになってくるということである。

これまでに開発した教材は，後ページに記載した一覧表の通りであるが，なかでも今年度新たに研究し，まとめた教材は，以下の２つである。教材につけられた記号についても，後ページに説明があるので，参照されたい。

A1-6	集合と場合の数の導入
S3-3	中心極限定理

2.2. 教員研修会の実施

開発した教材・カリキュラムを SSH 数学科教員研修会で公開し，全国に広めるとともに，本校における今後の研究の指針を得ることとしている。今年度は本校で 12 月に実施した。

■ 実施概要

研修会：SSH 数学科教員研修会
日程：平成 28 年 12 月 4 日（日）
会場：本校
参加者：中高数学科教員，大学院生，本校教員
約 190 名

これまでの数学科教員研修会で配布してきた，開発教材集をすべて電子化し，本校無線 LAN を参加者に開放することで，紹介した教材を PDF ファイル・Excel ファイルで公開し，広く共有を図ることを目指した。

なお，ここで紹介した本校のこれまでの開発教材は，「筑駒数学科 SSH on Web」に公開している。

■ 日程

○受付　9:00～9:30
○開会行事　9:30～9:45
　ＪＳＴ挨拶，会場校長挨拶

○SSH 教材等についての報告と研究協議
9:40～16:20

1. 茨城県清真学園高等学校・中学校
　発表者　法貴 孝哲　氏

2. 福井県立高志高等学校
　　　　発表者　青木 慎恵　氏
3. 東京工業大学附属科学技術高等学校
　　　　発表者　早坂 健　氏
4. 大阪府立大手前高等学校
　　　　発表者　金 義博　氏
5. 奈良県西大和中学校・高等学校
　　　　発表者　光永 文彦　氏

6. 筑波大学附属駒場中高Ⅰ
「筑波大学附属駒場中・高等学校の数学科 SSH の取組」　発表者　須田 学
7. 筑波大学附属駒場中高Ⅱ
「中高 6 か年を見通した幾何分野の指導」
　　　　発表者　須藤 雄生

8. 筑波大学附属駒場中高Ⅲ
「中高 6 か年を見通した統計分野の指導」
　　　　発表者　三井田裕樹

○全体講評　16:20～16:35
　　筑波大学　坂井 公 先生（数理物質科学研究科）
○閉会行事　16:35～16:45
○情報交換会　17:00～19:00

各校の数学教育活動の多様な取り組みを研修でき，情報交換しながら SSH 校として協力できるとても有意義な会であった。SSH 校以外にも SSH のような数学教育が普及することを望む。

アンケートでは，次のような意見があった。
［参加動機］
・具体的な教材の報告をお聞きしたいと思いました。
・いろいろな学校の活発な取り組みを聞き，参考にしたかったから。
・SSH 校における数学科の取り組みを知りたかったので。
・自分の（数学科の）授業力向上のため。
・数少ない数学の勉強の機会に。
・数学について研修をしている一環として。
・SSH についての取組を知りたいと思ったため。
・他校の実践に興味があり，自分自身の成長につながると思ったから。
・いつも参加していて，得られるものが多いから。
［意見（自由記述）］
・統計学，情報リテラシーの話が印象に残りました。今勤めている学校のカリキュラムでは，数 B で統計を扱いませんが，大学や社会人になった際に役に立つのかなと改めて感じました。
・日頃からの取り組みで課題研究を意識している点に伝統を感じた。
・教材開発を毎年考えられていてすばらしいと思います。
・いろいろな教材を蓄積されていて，余裕があれば自校で取り組んでいきたいと思いました。
・図形を用いた加法定理の証明はとても参考になりました。データの分析の方の話も非常に分かりやすく勉強になりました。
・常に新しいことにチャレンジする精神に感服します。
・トレミーの定理と加法定理，おもしろいです。統計

は探究活動につながることを実感しました。
・たくさんの資料を頂き，またこのような機会を与えてくださり，ありがとうございました。
・先取りなしでも中学生に考えさせることで，高校で習うことを理解させようとしている所が中高一貫ならではと感じた。しかし三角関数と三角比のつながりの実践は，まねしたいと思った。
・須藤先生，三井田先生の発表はどちらもわかりやすく，とても興味深いものであった。教材をみんなと共有したい，としてみなさまの苦労の賜物をWeb公開までして，数学教育の発展（統計学の教育については途上にある本校として，なかなか厳しいところです）に貢献される姿勢に敬服します。ありがとうございました。

SSH 校だけでなく，大学の教員やこれから教員になる人にとっても，情報交換や取り組みについての発表は，大変有意義であったとの評価を多く得ている。また，本校数学科の開発教材についても，Web をその場で活用する人が多く，意見を頂きながら，さらに発展させていきたい。

2.3. 数学特別講座の実施

SSH 事業として「数学特別講座」を大学の先生や卒業生に実施していただいている。この講座の目的は，中学高校の授業で学ぶ数学が将来どのように発展するのか，どのように活用されるのか等を知ることを通して，生徒の数学への興味・関心を高めるとともに，数学に対する理解を深め，数学を学ぶ意義を感じてもらうことである。なお，これらの内容も授業で活用できる教材として研究する必要があると考えている。

2016 年度に実施した特別講座のテーマと日程・講師は以下の通りである。回数は 14 年前からの通算，テーマと内容は生徒への募集案内に記載したものである。

募集案内を配布して希望者を募り，期末考査後の特別授業期間中に講義して頂いた。

○第 45 回数学特別講座
『数学と音楽：想像の世界の醍醐味』
日　時：平成 28 年 7 月 8 日（金）13:00～14:30
場　所：音楽室
講　師：中島さち子 氏（数学者，ジャズピアニスト，国際数学オリンピック金メダリスト）
参加者：中 1 から高 3 までの希望者　約 70 名

内　容：（参加募集案内より）

自身が魅せられてきた数学の世界を，個人的体験や素数・ζ関数を通して垣間見ると同時に，数学と音楽に通底するもの・創造の醍醐味についてお話します。

実際に，ピアノで倍音の響きを和音で聴きながら，音階の歴史（どの倍音がどの時代に影響していたかなど）をたどります。音は波であり，波はサイン波の合成で表すことができます（フーリエ変換)。フーリエ変換を簡単に概観し，実際にそれによりどのような音が表されるのかを聴くと同時に，応用としてζ関数の特殊値を計算します。

また，近年の多様な取り組みを紹介し，芸術家・数学研究／教育者の一人として，21 世紀，数学や音楽を学ぶ意義を改めて皆さんと一緒に考えたいと思います。

○第 46 回数学特別講座
『数学に現れる対称性』
日　時：平成 28 年 12 月 19 日（月）13:30～15:00
場　所：50 周年記念会館
講　師：大島　芳樹　氏　（東京大学カブリ数物宇宙研究機構・本校 52 期卒業生）
参加者：中 1 から高 1 までの希望者 39 名
内　容：（参加募集案内より）

自然界は花や蝶など対称性を持った形にあふれています。人工物でも建築やデザインなどに対称な図形が使われていて，美しさや安定さを感じることがあります。数学の世界でもしばしば対称性が現れます。線対称，点対称，回転対称など様々なタイプの対称性がありますが，それらは「群の作用」という抽象的な言葉で記述されます。図形の対称性だけでなく数や関数の対称性も考えることができて，ここ何十年かの数学や物理では，対称性を利用することが非常に役に立つことがわかってきています。たとえば対称性なしでは到底計算できないような量や解けない方程式が，対称性

を利用することで解を求められるということがあります。また一方で，対称性を仮定することで大きく発展している理論もあります。

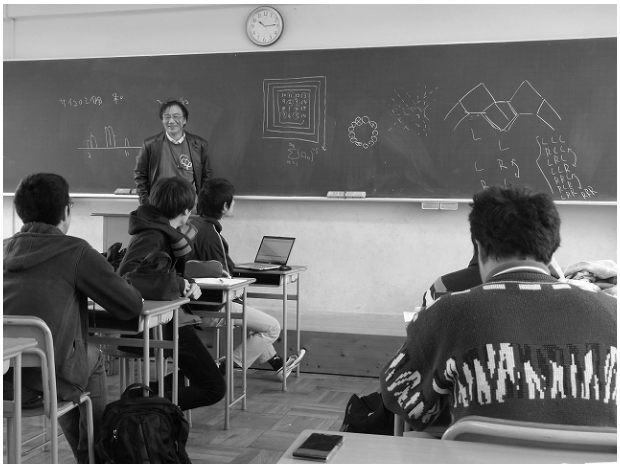
今回は，数学において対称性をどう扱うか，またどのように対称性が現れるかをいくつかの例でご紹介したいと思います。

各講座のアンケート結果から，参加者はいずれの講座にも興味を持って臨み，期待通りあるいは期待以上の内容に満足し，数学に関する興味関心を深めたようであった。

2.4. 学年を越えた少人数学習の研究と実践

サイエンスコミュニケーション能力の育成を目指して，高校 2 年生の「課題研究」（学校設定科目）を，筑波大学の先生と大学院生が参加する形で実施している。この延長として高校 3 年生の「課題研究」（学校設定科目）が位置付けられ，希望者が受講することになる。生徒は研究成果をレポートにまとめるとともに，論文集を作成し，全国で実施される様々な生徒研究発表会などで発表している。

2016 年度の高校 2 年生では，筑波大学の坂井公先生（数理物質科学研究科）と大学院生 2 名のご指導を受けながら，数学好きな生徒 18 名が集まって，『筑駒数学 $\sqrt{66}$ 』をテーマに，様々な数学の問題や性質について深く掘り下げるような研究に取り組んでいる。また，坂井先生や大学院生の講義もあり，高度な数学に触れる機会もある。高 2 課題研究の総括として，中学 3 年生も参加する中で，研究発表を行う。参加者のアンケートから，相互に刺激を受けていることが窺え，効果的な取り組みであると考えている。また，高校 3 年生では 1 名が受講し，高 2 課題研究終了時では未知だった内容をさらに研究し，明らかにした。



（坂井先生の講義）

課題研究の受講者は，大阪府立大手前高校主催の「マスフェスタ」や明治大学先端数理科学インスティテュート主催「高校生による MIMS 現象数理学研究発表会」のような生徒研究発表会にも積極的に参加し，積極的に口頭発表やポスター発表を行っている。詳細は以下の通りである。

① マスフェスタ

マスフェスタ（全国数学生徒研究発表会）とは，コア SSH 校である大阪府立大手前高等学校が主催する研究発表会で，全国の数学に興味関心の高い高校生が集まって，発表・議論・交流する場として企画されたものである。今回は，8 月 27 日に京都大学を会場に，全国から SSH 指定校等 62 校が集まった。本校からは口頭発表とポスター発表に 3 名が参加した。

参加した生徒たちの感想には，「私は今回のマスフェスタのような全国的な発表会は生まれて初めての経験だったので，当日はいつになく緊張していた。しかし，アピールタイムのプレゼンテーションが始まるや否や，話すことに集中できるようになり，次第に緊張は解け

ていった。思いのほか聴衆の人たちもたくさんいて，とても励みになり数学研究への自信もついた。そして，何よりも数学という共通の言語を通じて，多くの仲間と知り合う機会に恵まれたことは，私にとって大きな収穫となった。」「京都大学で発表ができたこと，京都大学数理解析研究所の大学院生やさきがけ研究者との交流会はとても貴重な経験になりました。」「今まで，自分の数学研究を外に向けて発信するという機会が無かったので，今回のマスフェスタは初めての連続だった。他校の生徒や先生に自分の話を真剣に聞いてもらった経験は，これからのモチベーションにも繋がった。」とあり，参加した全員が刺激を受け，さらに数学への意欲が高まったことがわかる。

また，研究会に参加するための取り組みの段階でも生徒にとってとても貴重な経験をさせることができることも次の自己評価よりわかった。

「プレゼンテーションでも練習の成果を活かすことができ，専門家をはじめとした聴き手側に自分の言いたいことがうまく伝えられたと思う。」「発表前日に京都に向かう新幹線の中で，残っていた証明の一部を完成させることができ完全証明を達成したときには，この上ない喜びを味わうことができた。」

② 高校生によるMIMS現象数理学研究発表会

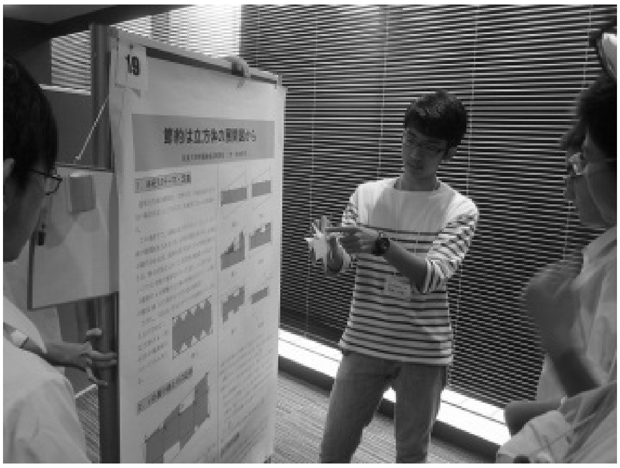
2016年10月9日に，明治大学先端数理科学インスティテュート（以下MIMS）の主催で開催された，「第6回 高校生によるMIMS現象数理学研究発表会」において，5件の口頭発表と19件のポスター発表が高校生により行われた。本校からは課題研究で数学を選択している高校2年生16名で参加し，そのうち3名が以下の3点のポスター発表を行った。

・節約は立方体の展開図から

・2台のエレベータの効率の評価

・石取りゲームの数理

このうち，ポスター発表「節約は立方体の展開図から」の研究が審査員特別賞とオーディエンス賞を受賞した。本発表会は現象数理の発表会であるため，身近な現象のちょっと不思議なことを数理的な解析や実験，考察を高校生ならではの視点で行っている研究も多く，発表生徒だけでなくオーディエンスとして参加した生徒も良い刺激を受け，有意義な時間を過ごしていた。



紙面の都合上，立方体の展開図の研究を少しだけ紹介する。通常，立方体の展開図と言えば6枚の正方形を想像するが，この研究はそうではない。この研究は1枚の展開図になりさえすれば，辺以外のどこで切って展開しても良いという条件下で考察を行っており，変分問題として考察している点が面白い。発表も具体的な模型で演示する工夫が見られ，妙な形をした1枚の紙がぴったりと立方体になった時の不思議な感動が忘れられない。

2.5. 生徒の数学的活動の支援

特別講座同様，生徒の数学への興味関心を高めるために数学オリンピック(JMO)・数学ジュニアオリンピック(JJMO)への参加を募っている。今年度も多数が

応募している。国際数学オリンピックには，日本が初参加した第 32 回大会から 2016 年夏の第 57 回大会までに，のべ 40 名の生徒が日本代表として参加した。
≪国際数学オリンピック（IMO）の近年の成績≫
2014　第 55 回国際数学オリンピック（IMO）南アフリカ大会の日本代表選手１名金メダル１名銀メダル獲得（2014 年 7 月）
2015　第 56 回国際数学オリンピック（IMO）タイ大会の日本代表選手 1 名銀メダル 1 名銅メダル獲得（2015 年 7 月）
2016　第 57 回国際数学オリンピック（IMO）香港大会の日本代表選手２名銀メダル獲得(2016 年 7 月）

・部活動「数学科学研究会（MATHIC）」の活動支援
本校数学科では，数学に興味関心を持った生徒が集まり研究活動を行い，数学を楽しむ部活動「数学科学研究会」の支援を行っている。今年度も文化祭での発表に多数の来場者を得るとともに，研究レポート集“Café Bollweck”を発行した。

・算数・数学の自由研究作品コンクールへの応募支援
算数・数学の自由研究とは，(財)理数教育研究所が主催するコンクールで，日常生活や学校での学びなどで感じた疑問や課題を，数学の力を活用して探究し，気付いたことやわかったことをレポートにまとめて応募する企画である。2015 年度高 2 数学ゼミナール（高 2 課題研究の前身）を選択した 14 名の研究成果を冊子にまとめるとともに，コンクールに応募した。その結果，1 名の研究が優秀と認められ，最優秀賞（Rimse 理事長賞）を受賞した。

・算額をつくろうコンクールへの応募支援
算額をつくろうコンクールとは，特定非営利活動法人「和算を普及する会」が主催するコンクールで，江戸時代の算額奉納の習慣を小中高生にも楽しんでもらうことを目的として毎年開催されている。今年度は第 19 回のコンクールであり，中 1 から中 3 までの希望者 12 名が参加して，1 名が奨励賞を受賞した。

3. 開発教材一覧および開発教材の実際

★印　今年度開発中のもので本稿に記載。
「A. 代数(Algebra)」,「An. 解析(Analysis)」,「G. 幾何(Geometry)」,「P. 確率(Probability)」,
「S. 統計(Statistics)」,「D. 微分方程式(Differential Equation)」,「O. その他(Others)」
各項目を整理する際，中学を小文字，高校を大文字にして，校種を区別した。また，教材開発の際に想定している，もしくは，実際に授業をおこなった学年を数字で示した。学年を特定していない教材や複数学年での取り扱いを想定している教材は，数字の代わりに「f」を用いた。
〔例〕　an2.　合成関数とグラフ
An.は解析であり，先頭が小文字なので中学生対象，すなわち中学２年の「解析」の教材を表す。
以下，表に続いて，★で示した教材について具体的に報告する。

開発教材一覧（筑波大学附属駒場中・高等学校数学科）
２０１６年度

a1.	整数	2008
a1-2.	有理数	2007
a1-3.	剰余類の演算とウィルソンの定理	2014
a1-4.	速算術	2015
a3.	暗号理論と整数論	2006
A1.	数と方程式	2008
A1-2.	平方根の連分数展開について	2012
A1-3.	高校における整数問題	2014
A1-4.	開平法と連分数による平方根の近似値	2014
A1-5.	オイラー関数について	2015
A1-6.	集合と場合の数の導入	2016 ★
A2.	離散な数列と連続な関数	2009
A2-2.	ΣＫ＾４と区分求積法	2011
A2-3.	斜交座標の薦め	2015
A2-4.	漸化式	2015
A3.	置換と正多面体群	2007
A3-2.	１次変換の線形性	2008
A3-3.	複素数と複素数平面	2015
an1.	2 元 1 次方程式とその応用	2007
an2.	合成関数とグラフ	2009
an3.	絶対値を含む関数のグラフ	2009
an3-2.	絶対値とガウス記号を含む関数のソフトウエアによるグラフ描画	2010
An1.	2 次関数	2007
An1-2	2 次関数（２）	2009
An1-3	和や積のグラフ	2010
An1-4.	図で証明する三角関数の性質	2013
An2.	円周率の近似	2007
An2-2.	三角関数表を作る	2006
An2-3.	加法定理から導き出される多項式	2006
An2-4.	三角関数の和と積の周期	2011
g1.	四角形の合同条件	2008
g1-2.	作図の教材	2009
g1-3.	四角形の性質（包含関係）	2010
g1-4.	正多面体の面や辺の作る角	2012
g1-5.	三平方の定理	2013
g2.	チェバ・メネラウスの定理	2007
g3.	立方体の切断	2007
g3-2.	反転法	2007
g3-3.	立方体の切断（２）	2009

g3-4.	ヘロンの公式の幾何的証明と応用	2013
g3-5.	双心四角形の性質	2015
G1.	四面体の幾何	2008
G1-2.	デカルトの円定理	2009
G1-3.	正多角形と等積な正方形の作図法	2013
G2.	正１７角形の作図	2008
G2-2.	ベクトルの内積と方べきの定理	2011
s1.	統計の基本	2006
s2.	標準偏差・近似直線	2006
s3.	正規分布と標準化	2006
s3-2.	シミュレーションによる授業	2006
S1.	回帰直線・近似曲線	2006
S1-2.	数理統計学入門	2009
S2.	残差分析によるデータ系列の関係	2007
S3.	主成分分析入門	2007
S3-2.	正規分布の平均の推定	2008
S3-3.	中心極限定理	2016 ★
d1.	自然数の和，平方数の和，立方数の和	2007
d1-2.	『数える』	2010
d2.	グラフや図形の移動・変形	2006
d3.	２次関数の接線	2006
d3-2.	面積・体積	2006
d3-3.	最大・最小	2006
d3-4.	放物線で囲まれる面積	2013
d3-5.	場合の数 ～樹形図から漸化式へ～	2014
D1.	包絡線	2006
D2.	グラフ描画の方法 －テクノロジーへの挑戦－	2007
D2-2.	３次関数の性質	2015
D3.	包絡線(その２)	2006
D3-2.	微分方程式	2006
D3-3.	微分方程式の応用	2006
D3-4.	関数のグラフの描画法	2008
D3-5.	曲線と面積	2008
Of.	4 元数を高校数学へ	2007
O2.	有限世界の数学	2007
p2.	身近な確率・連続変量の確率	2011
Pf1.	組み合わせの確率モデル	2007
Pf2.	EBI と確率・統計	2007
Pf3.	無限集合の確率	2008

A1-6. 集合と場合の数の導入教材 ～各位の数の和が一定である自然数の個数～

関連分野 ：離散数学
高等数学 ：集合論，離散数学
対象学年 ：中学１年生／高校１年生
関連単元 ：場合の数と確率，
　　　　　 集合と論理
教 材 名 ：各位の数の和が一定である自然数の個数

《はじめに》

場合の数の学習活動において，筆者は，「数える」とはどういうことか，ということを第一の視点として考えている。正確にものを数えるためには，例えば，数える対象をはっきりさせ，その対象をもれなく，だぶりなく数えるための場合分けを考案することが必要である。また，数えることとは数える対象である集合と，数集合との一対一対応を考えることであるから，数える対象のかわりに，要素の個数が等しいほかの「より数えやすい集合」を考えることが役立つこともある。これらのことを意識できる教材を，高校１年数学Ａの導入として扱いたいと考え，本教材を開発した。なお，扱い方（表記など）によっては，中学１年の数の指導でも扱えると考える。

《導入課題～３桁の場合》

各位の数の和が一定である３桁の自然数の個数

３桁の正の整数について，次の問いに答えなさい。
(1) 122 や 500 のように，各位の数の和が５であるものは全部で何個あるか。
(2) 983 や 776 のように，各位の数の和が 20 であるものは全部で何個あるか。
(3) 753 や 960 のように，各位の数の和が 15 であるものは全部で何個あるか。

上記の課題を，数学Ａの第１回授業における導入課題として提示した。出題側としては，考えやすくするために具体例を示したつもりである。

生徒の反応はさまざまであった。特に(1)は和が５という，地道に数えることも可能な設定にしたので，実際に数えている生徒もいた。そこで，まずはその解法をとりあげる。

《(1)の解法とその比較》

(1)の解法Ａ

数の小さい順に書き上げると，
104，113，122，131，140，
203，212，221，230，
302，311，320，
401，410，
500　　で，合計 5＋4＋3＋2＋1＝15（個）…答

この解法を扱いながら，やみくもに（思いついた順に）数えるだけでは，正確に数えるのは難しく，「小さい順」や「大きい順」などの順序をつけることが「数える」ことの基本である，ということを確認した。

一方で，先取り学習をしている生徒などは，組合せの考えを使うと早い，という。授業では，その解法も取り上げ，解法Ａとの比較を試みていった。

(1)の解法Ｂ

和が５であることを　　○○○○○　　と表す。
この５個の○を，百の位，十の位，一の位に分ける２本の仕切り｜の入れ方が何通りかを求めればよい。
百の位は１以上であるから，一番左の○を切り離し，
○（○○○○｜｜）　　のカッコ内を並べかえる。
その方法は，${}_6C_2=15$（通り）　よって 15 個…答

この解法自体はいわゆる重複組合せの考え方であり，教科書的には「かなり先」の解法である。この解法をすべて解説してしまうと導入ではとても扱いきれないが，授業では組合せ${}_nC_r$については知識として知っているという生徒が多そうな様子であったので，これを

$$6\times5\div2=15\text{（個）}$$

という解法である，として扱い，解法Ａとの比較という観点でのみ扱うことにした。このようにみることで，三角数との関連に気付く生徒もいた。

また，授業では扱うことができなかったが，解法Ｂの１本目の仕切り位置に着目すると解法Ａも説明がつくことに触れても良いであろう。

ただし，この方法は，(2)でそのまま適用しようとしても，うまくいかない。各位の数は，０から９までしかとることができないからである。

そこで(2)では，別の解法が必要になる。

《(2)の解法とその比較》

(2)の解法 A

数の小さい順に書き上げると,
299,
389, 398,
479, 488, 497,
569, 578, 587, 596,
659, 668, 677, 686, 695,
749, 758, 767, 776, 785, 794
839, 848, 857, 866, 875, 884, 893
929, 938, 947, 956, 965, 974, 983, 992
で, 合計1+2+3+4+5+6+7+8=36（個）…答

(2)を解く前に, (1)で解法 B を扱うと, このような解法で(2)を解く生徒はかなり少なくなる。実際, 授業においても, この解法を用いた生徒は, (1)の解法を検討する前に(2)も解いていたという生徒がほとんどであると思われた。一方, このようにして書き上げたときにできる「数の三角形」は, (1)とは上下逆さの三角形になっていることは気に留めておきたい。

筆者の授業では先に(1)の解法Ｂを扱っていたので, (2)でもどのように考えれば解法 B, すなわち

9×8÷2=36

という方法で解けるかということが焦点になった。解法 B の○と仕切り｜の考えそのままに, 20 個の○を並べて $_{21}C_2$ というわけにはいかない。それは, 各位の数は必ず9以下であり,「○が10個以上連続で並んではいけない」という新たな規則に対応しなければならないからである。

これについて次のような解法が生徒から寄せられた。

(2)の解法 B

各位の数の和が20である数を999からひくと,「各位の数の和が7である, 3桁以下の正の整数」(＊)になる。この対応は一対一であるから,(＊)の整数が何個あるか数えればよい。それは, 百の位に0を許してもよいのと同じであり,
○○○○○○○｜｜　の並べかえ方と同じだから,
$_9C_2=36$（個）　…答

この解法は,「個数の同じである, 別のものへの対応づけを考えることで, より数えやすいものを数える」という考えを次々と使っていくものである。

一方で, 結果が $_9C_2$ であるということから天下り的に考えると,「各位の和が 8 であるもの」と「各位の和が 20 であるもの」は同じ個数である。このことから, 解法Ｂにおいて, あらかじめ百の位に1をたしておけば, 各位の和が8であるものになる, ということにも気付ける。

(2)の解法 B′

各位の数の和が20である数を1099からひくと,「各位の数の和が 8 である 3 桁の正の整数」(★) になる。この対応は一対一であるから,(★) の整数が何個あるか数えればよい。
○（○○○○○○○｜｜）　のカッコ内を
並べかえて, $_9C_2=36$（個）　…答

1099からひくことによって, 各位の数の和が20であるものと, 各位の数の和が8であるものに一対一の対応がつくということは, 解法Ａのように数を小さい順に書き上げた三角形が, (1)と(2)で上下逆さの形になることの説明にもなっている。

ちなみに授業では出てこなかったが,「○が10個以上並んではいけない」という新たな規則に対応させながら組合せを用いて解くと, 次のようになる。

(2)の解法 C

各位の数が10未満であることを無視して数えると,
○（○19個と仕切り｜2本）　のカッコ内を
並べかえて, $_{21}C_2=210$（個）
このうち, 10以上の数の位が2つあるものは
(百の位が10, 十の位が10, 一の位が0) と
(百の位が10, 十の位が0, 一の位が10) の2個。
百の位のみが11以上であるものは,
○11個（○9個と仕切り｜2本）　のカッコ内を
並べかえて, $_{11}C_2=55$（個）
百の位のみちょうど10であるものは,
残りの位は1以上で和が10だから, 9個。
十の位のみが11以上であるものは,
○（○8個と仕切り｜2本）　のカッコ内を
並べかえたあと, 十の位に○を 11 個加えれば作れるから, $_{10}C_2=45$（個）
十の位のみちょうど10であるものは,
残りの位は1以上で和が10だから, 9個。

一の位については十の位と同様であるから，
求める個数は，
$210-2-(55+9)-(45+9)\times 2=36$（個）…答

一方で，(3)の場合はさらに状況が異なってくる。次にそれを考える。

《(3)の解法とその比較》

(3)の解法Ａ

数の小さい順に書き上げると，
159，168，177，186，195，
249，258，267，276，285，294，
339，348，357，366，375，384，393，
429，438，447，456，465，474，483，492，
519，528，537，546，555，564，573，582，591，
609，618，627，636，645，654，663，672，681，690，
708，717，726，735，744，753，762，771，780，
807，816，825，834，843，852，861，870，
906，915，924，933，942，951，960
で，合計　5+6+7+8+9+10+9+8+7
＝69（個）…答

書き上げてみると，こんどは数が三角形状に並ばず，このように先のとがった五角形状となる。これをどのように数えるか。授業では，先述のとおり早い段階で(1)も(2)も解法Ｂが出てきていたので，(3)でこの形に着目する生徒ははじめあまり出てこなかった。解法Ｂにあたるものを考えきれず，仕方なく解法Ａに流れてきたと思われる生徒もいたが，三角数の計算でいえば，

(3)の解法Ｂ？

$(5+10)\times 6\div 2+(7+9)\times 3\div 2=69$（個）…答

という計算であり，なかなか意味を見つけるのは難しかった。あるいは中学１年生のほうが，この式に何らかの意味を見つけられるかもしれない。

授業では扱わなかったが，「10 以上になる位を除いていく」解法を用いると，次のようになるであろう。

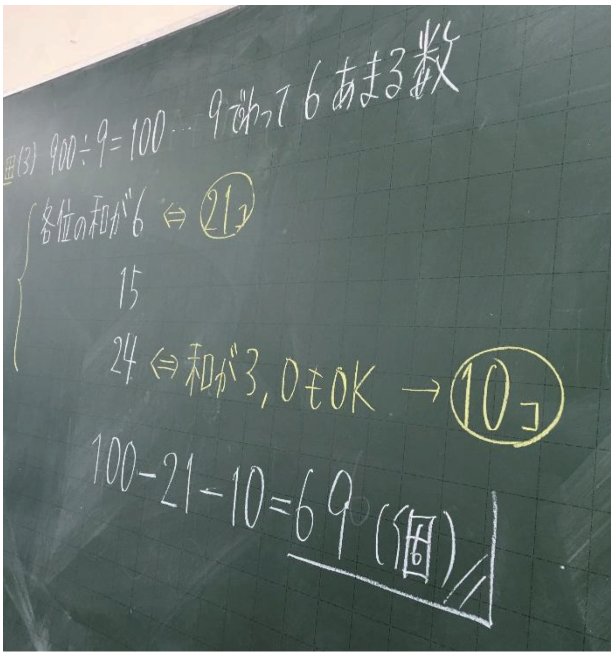
(3)の解法Ｃ

各位の数が 10 未満であることを無視して数えると，
○（○14 個と仕切り｜2 本）　のカッコ内を並べかえて，${}_{16}C_2=120$（個）
各位の数の和が 15 であるから，10 以上の位が現れるとすれば１つである。
百の位のみが 10 以上であるものは，
○10 個（○5 個と仕切り｜2 本）　のカッコ内を並べかえて，${}_{7}C_2=21$（個）
十の位のみが 10 以上であるものは，
○（○4 個と仕切り｜2 本）　のカッコ内を並べかえたあと，十の位に○を 10 個加えれば作れるから，${}_{6}C_2=15$（個）
一の位については十の位と同様であるから，
求める個数は，
$120-21-15\times 2=69$（個）…答

解法Ｃは，各位の数が 10 以上になってしまう場合が，和が 20 の場合よりも簡単な場合分けですんでいる。導入課題において，出題の順序を変えれば，この解法が注目されることもあると考えられる。

一方で，(3)においてはじめて，全く異なるアプローチの解法を編み出す生徒が現れた。

(3)の解法Ｄ



3 桁の正の整数を 9 で割った余りと，その各位の数の和を 9 で割った余りは一致する。
よって，各位の数の和が 15 である 3 桁の正の整数

を，9 で割った余りは 6 である。

3 桁の正の整数は全部で 900 個であるから，9 で割った余りが 6 であるものは全部で 100 個ある。

そのうち，各位の数の和が 6 であるものが 21 個，

各位の数の和が 24 であるものが 10 個

あり，残りはすべて各位の数の和が 15 であるもののはずである。

よって，100－21－10＝69（個）　…答

この解法は，3 桁の正の整数 900 個を，9 で割った余りによって 100 個ずつの 9 組に分け，それぞれの組のなかで各位の数の和に着目していくという発想である。各位の数の和と，9 で割った余りによって，900 個の正の整数はすべてもれなく，だぶりなく場合分けされていくので，この解法はきわめて強力である。この発想が急にどこから出てきたのかは，発表者以外のほぼ全員の生徒が不思議がっていたが，その効力の大きさには感心しきりであった。

《各位の数の和が n であるもの（一般化）》

3 桁の正の整数において，各位の数の和は最小で 1，最大で 27 である。そこで，次の課題を設定する。

一般化された課題

3 桁の正の整数のうち，

各位の数の和が n （$1 \leqq n \leqq 27$，n は整数）であるものの個数 $T(n)$ を，n の式で表しなさい。

なお，$T(n)$ について，ここまでにあげた解法にもとづいて計算すると，次のような結果を得る。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T(n)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$T(n)$	54	61	66	69	70	69	66	61	54

n	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$T(n)$	45	36	28	21	15	10	6	3	1

これらの一般化の過程は，授業中に出たもの，授業後にレポートで提出されたもの，それぞれをあわせて次のようになった。まず，式でのアプローチが容易である解法 D から紹介する。

(3)の解法 D に基づく一般化

$1 \leqq n \leqq 9$ のとき，

$$T(n) = {}_{n+1}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$19 \leqq n \leqq 27$ のとき，$1 \leqq 28-n \leqq 9$ で，

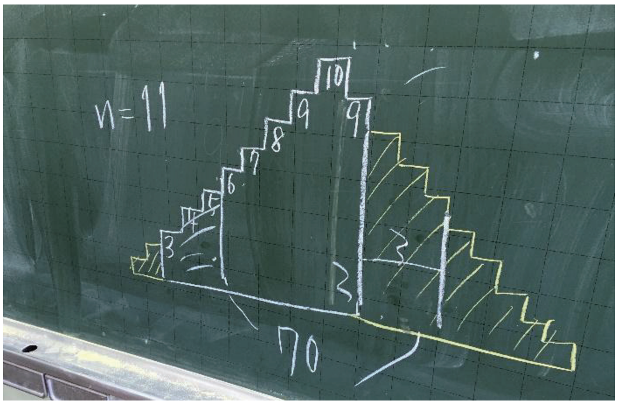
$$T(n) = T(28-n)$$
$$= \frac{1}{2}(29-n)(28-n)$$

$10 \leqq n \leqq 18$ のとき，

$$T(n) = 100 - T(n-9) - T(n+9)$$
$$= 100 - \frac{(n-9)(n-8)}{2} - \frac{(20-n)(19-n)}{2}$$
$$= -n^2 + 28n - 126$$

一方，解法 A に基づく一般化は，三角数を利用して図形的に考えるものが多かった。

(3)の解法 A に基づく一般化



図形的に考えると，次のように 35 個の数を並べておき，（はじめの 0 とおわりの 0 は各 8 個）

0，0，0，…，0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，9，8，7，6，5，4，3，2，1，0，0，0，…，0

これを n 番目から順に $(n+8)$ 番目まで 9 個加えたものが $T(n)$ である，と考えることができる。（一部の生徒はこれを「動く山理論」と名付けていた）

したがって，$1 \leqq n \leqq 9$ および $19 \leqq n \leqq 27$ については，$T(n)$ は三角数である。

一方，$10 \leqq n \leqq 18$ について，図のように「山の中央部」へ移動すると，必ず正方形のかたちで余る。この正方形の一辺は，中心からのずれ $|n-14|$ である。「山の中央部」$T(14)=70$ であるから，

$$T(n) = 70 - (n-14)^2 \qquad (10 \leqq n \leqq 18)$$

が成り立つ。

なお本校では，中学校において絶対値のグラフやガウス記号の含まれた関数のグラフなどを扱っていることから，$1 \leqq n \leqq 9$，$10 \leqq n \leqq 18$，$19 \leqq n \leqq 27$ の3通りの場合分けをすることなく，1本の式に表すことはできないだろうかと考える生徒も複数おり，発展レポートとして提出する生徒もいた。

《拡張～4桁の場合》

各位の数の和が一定である4桁の自然数の個数

4桁の正の整数のうち，
各位の数の和が n（$1 \leqq n \leqq 36$，n は整数）であるものの個数 $T(n)$ を，n の式で表しなさい。

4桁になると，すべて書き上げていく解法Aでは限界があるので，自然と解法B，C，Dを中心に考えていくことになるだろう。これについては，授業では発展課題として与えたが，別の機会で高校3年生（授業対象とは異なる学年）の実力テストとして出題した。

4桁では，$1 \leqq n \leqq 9$，$10 \leqq n \leqq 18$，$19 \leqq n \leqq 27$，$28 \leqq n \leqq 36$ の4通りに場合分けすることになる。解法Bのように，4桁の場合は10999との差をとることによって，各位の数の和が n であるものと，各位の数の和が $(37-n)$ であるものとの一対一対応を考えることができるから，実質的には $1 \leqq n \leqq 18$ について考えればよい。また，$1 \leqq n \leqq 9$ については各位の数が10以上になってしまうことを考える必要がないから，${}_{n+2}C_3$ で求められる。残りは，$10 \leqq n \leqq 18$ の場合のみである。

（2016 須藤）

S. 3-3 中心極限定理

関連分野：統計分野
高等数学：統計
対象学年：高校３年生
関連単元：「統計処理」(数学 C)
教 材 名：「中心極限定理の考察」

≪大学での学びへつながる高校での学び≫

統計的推測において，高校３年生を対象とした教材として，Microsoft Excel を用いて正規分布の数表やグラフを作成することで，正規分布による統計処理の重要性は，中心極限定理に基づいていると言える。数理統計の基本的な概念（正規分布等の基礎知識）についてはある程度既習であることを前提に，数値実験によって中心極限定理を実際に体験するという教材を作成した。

S. 3-3. 1 中心極限定理

3-3 中心極限定理(Central Limit Theorem)

平均μ、分散σ^2である同一の分布に独立に従う，n 個の確率変数，$X_1, X_2, \cdots X_n$ について，

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$ の分布は，$n \to \infty$ のとき，

平均μ，分散$\dfrac{\sigma^2}{n}$の正規分布で近似される。

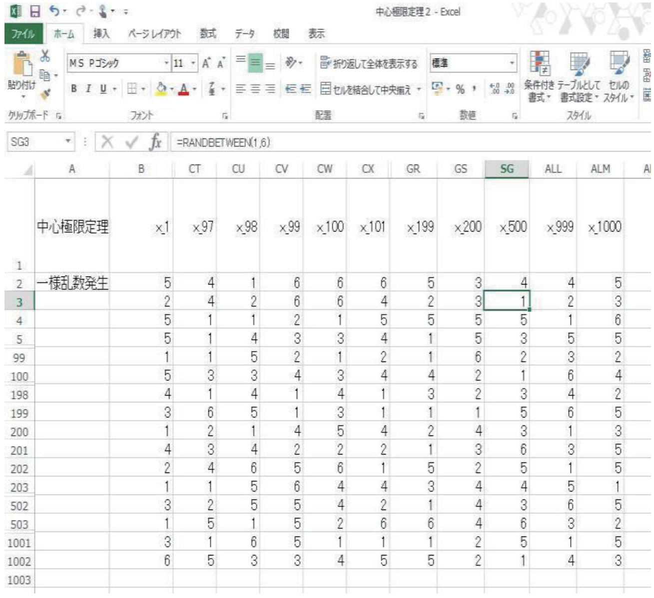
どのような分布であろうと，その標本平均の分布は正規分布になるという定理である。これを実際に体験させるために，乱数を発生させて正規分布に近づく様子を実験によって確認する。

S. 3-3. 2 一様乱数を用いたシミュレーション

もっとも簡単なシミュレーションとして，一様乱数からの確認を行ってみる。

手順１

まずは，「RANDBETWEEN」という関数を使い，一様乱数を発生させる。ここでは，1～6 までの整数値を発生させる。1000 列にデータを出し，それを 1000 行作る。1000×1000 の数表を省略すると次の図のようになる。



	A	B	CT	CU	CV	CW	CX	GR	GS	SG	ALL	ALM
1	中心極限定理	x_1	x_97	x_98	x_99	x_100	x_101	x_199	x_200	x_500	x_999	x_1000
2	一様乱数発生	5	4	1	6	6	6	5	3	4	4	5
3		2	4	2	6	6	4	2	3	1	2	3
4		5	1	1	2	1	5	5	5	5	1	6
5		5	1	4	3	3	4	1	5	3	5	5
99		1	1	5	2	1	2	1	6	2	3	2
100		5	3	3	4	3	4	4	2	1	6	4
198		4	1	4	1	4	1	3	2	3	4	2
199		3	6	5	1	3	1	1	1	5	6	5
200		1	2	1	4	5	4	2	4	3	1	3
201		4	3	4	2	2	2	1	3	6	3	5
202		2	4	6	5	6	1	5	2	5	1	5
203		1	1	5	6	4	4	3	4	4	5	1
502		3	2	5	5	4	2	1	4	3	6	5
503		1	5	1	5	2	6	6	4	6	3	2
1001		3	1	6	5	1	1	1	2	5	1	5
1002		6	5	3	3	4	5	5	2	1	4	3
1003												

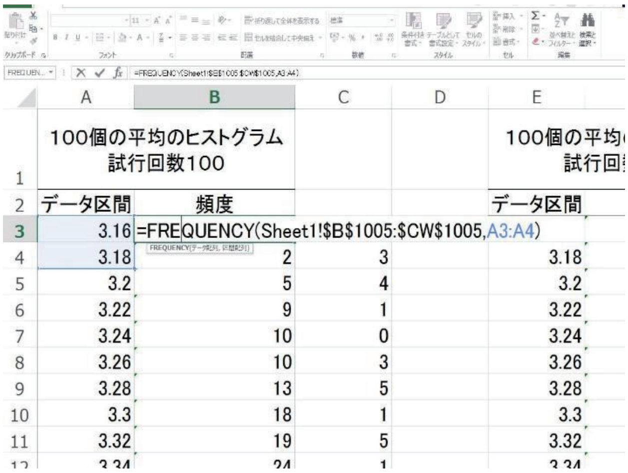
手順２

その平均値を計算し，100 個の平均値を 1005 行目，200 個の平均値を 1006 行目，500 個の平均値を 1007 行目，1000 個の平均を 1008 行目に並べる。

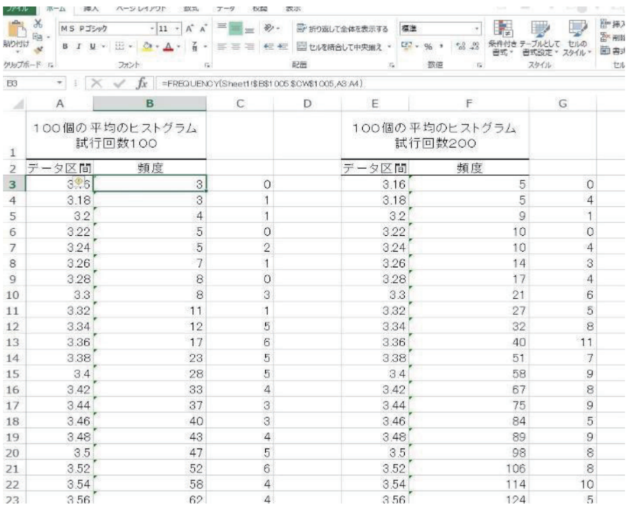
	A	B	CT	CU	CV	CW	CX	GR	GS	SG	ALL	ALM
1	中心極限定理	x_1	x_97	x_98	x_99	x_100	x_101	x_199	x_200	x_500	x_999	x_1000
2	一様乱数発生	5	4	1	6	6	6	5	3	4	4	5
3		2	4	2	6	6	4	2	3	1	2	3
4		5	1	1	2	1	5	5	5	5	1	6
5		5	1	4	3	3	4	1	5	3	5	5
99		1	1	5	2	1	2	1	6	2	3	2
100		5	3	3	4	3	4	4	2	1	6	4
198		4	1	4	1	4	1	3	2	3	4	2
199		3	6	5	1	3	1	1	1	5	6	5
200		1	2	1	4	5	4	2	4	3	1	3
201		4	3	4	2	2	2	1	3	6	3	5
202		2	4	6	5	6	1	5	2	5	1	5
203		1	1	5	6	4	4	3	4	4	5	1
502		3	2	5	5	4	2	1	4	3	6	5
503		1	5	1	5	2	6	6	4	6	3	2
1001		3	1	6	5	1	1	1	2	5	1	5
1002		6	5	3	3	4	5	5	2	1	4	3
1003												
1004												
1005	100個の平均	3.5555556	3.5253	3.6263	3.5455	3.5455	3.5859	3.38384	3.28283	3.4242	3.68687	3.51515
1006	200個の平均	3.34	3.41	3.575	3.52	3.42	3.495	3.325	3.225	3.465	3.515	3.485
1007	500個の平均	3.4071856	3.4012	3.5289	3.479	3.4212	3.4291	3.33932	3.40918	3.5589	3.499	3.49301
1008	1000個の平均	3.4775225	3.4795	3.5045	3.5035	3.4945	3.4785	3.47952	3.59141	3.5235	3.49251	3.51349
1009												
1010												

手順３

新しいシートに FREQUENCY 関数を使って，ヒストグラムを作る。



	A	B	C	D	E
1	100個の平均のヒストグラム 試行回数100				100個の平均 試行回
2	データ区間	頻度			データ区間
3	3.16	=FREQUENCY(Sheet1!$B$1005:$CW$1005,A3:A4)			
4	3.18	2	3		3.18
5	3.2	5	4		3.2
6	3.22	9	1		3.22
7	3.24	10	0		3.24
8	3.26	10	3		3.26
9	3.28	13	5		3.28
10	3.3	18	1		3.3
11	3.32	19	5		3.32
12	3.34	24	1		3.34

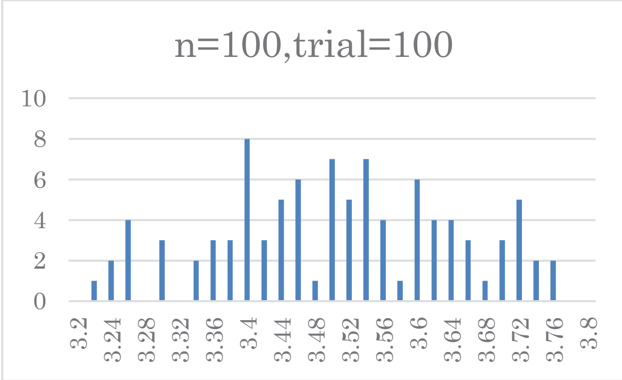


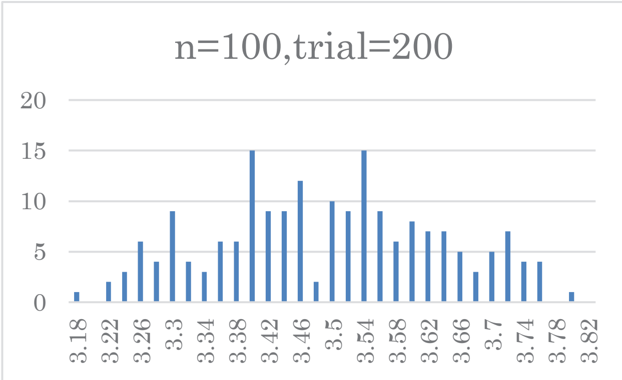
=FREQUENCY(Sheet1!$B$1005:$CW$1005,A3:A4)

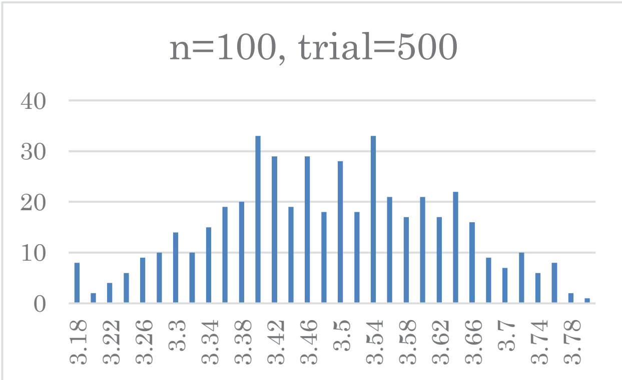
	A	B	C	D	E	F	G
1	100個の平均のヒストグラム 試行回数100				100個の平均のヒストグラム 試行回数200		
2	データ区間	頻度			データ区間	頻度	
3	3.16	3	0		3.16	5	0
4	3.18	3	1		3.18	5	4
5	3.2	4	1		3.2	9	1
6	3.22	5	0		3.22	10	0
7	3.24	5	2		3.24	10	4
8	3.26	7	1		3.26	14	3
9	3.28	8	0		3.28	17	4
10	3.3	8	3		3.3	21	6
11	3.32	11	1		3.32	27	5
12	3.34	12	5		3.34	32	8
13	3.36	17	6		3.36	40	11
14	3.38	23	5		3.38	51	7
15	3.4	28	5		3.4	58	9
16	3.42	33	4		3.42	67	8
17	3.44	37	3		3.44	75	9
18	3.46	40	3		3.46	84	5
19	3.48	43	4		3.48	89	9
20	3.5	47	5		3.5	98	8
21	3.52	52	6		3.52	106	8
22	3.54	58	4		3.54	114	10
23	3.56	62	4		3.56	124	5

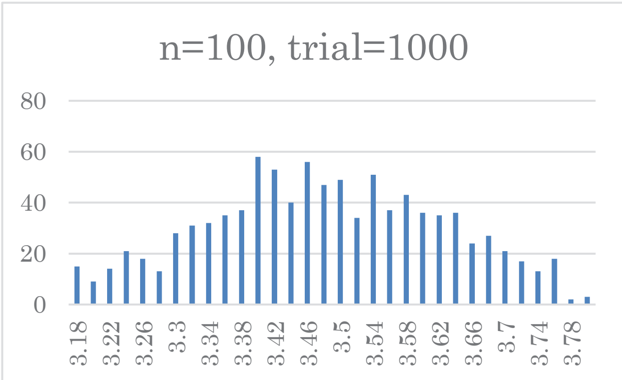
ここで,「ヒストグラムを作るための平均値の個数」を「試行回数」とし，まずは試行回数 100 回で 100 個のデータに対する平均値についてのヒストグラムを作り，これを試行回数 200，500，1000 回のヒストグラムを作ってグラフを作ると以下のようになる。

n＝100 としたとき



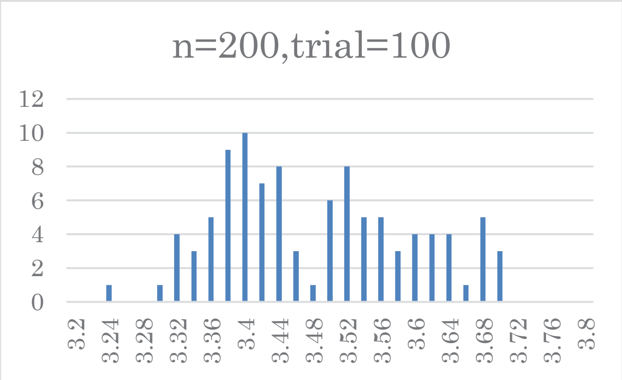


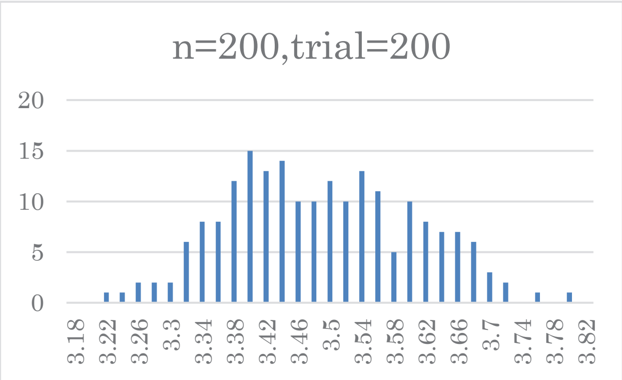


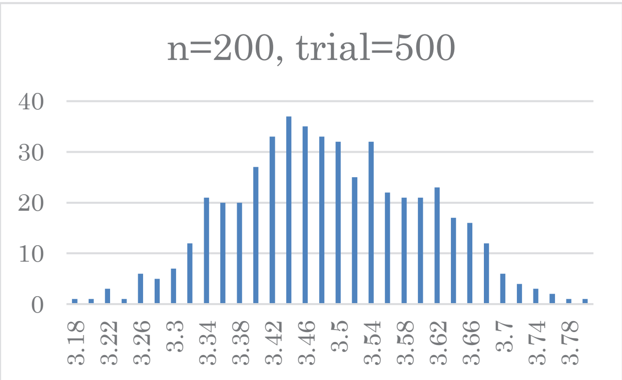


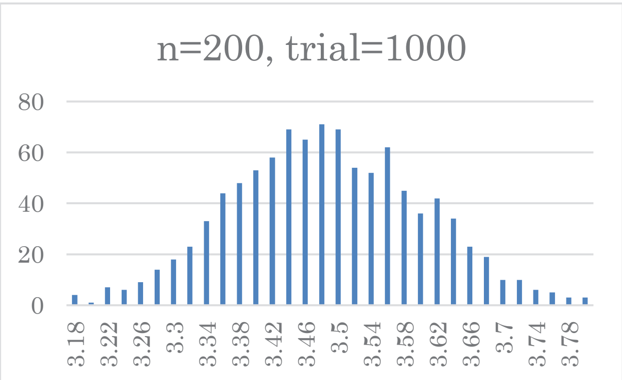
これらを，シートを変えて繰り返し，データ数 200，500，1000 個のシートを作り，次の項にて並べた。中心極限定理の「平均に集まってくる」様子が良くわかる。

n＝200 としたとき

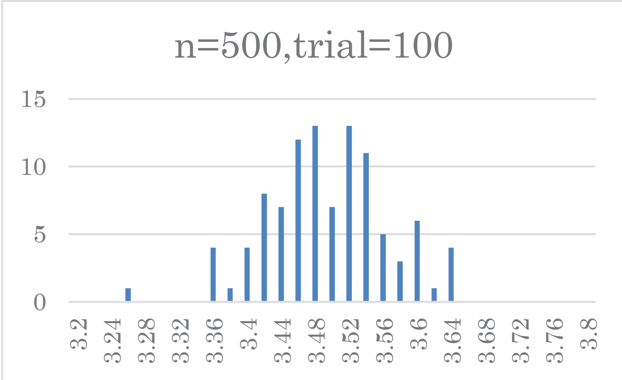


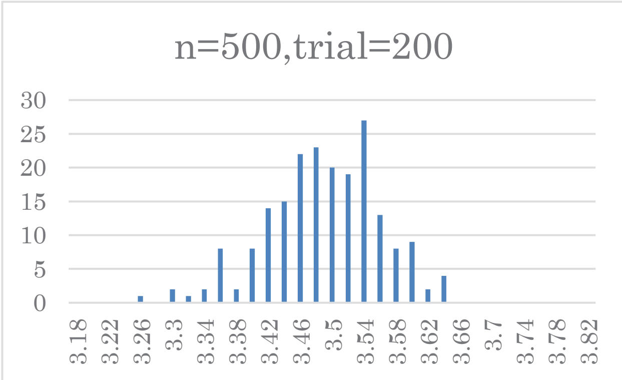


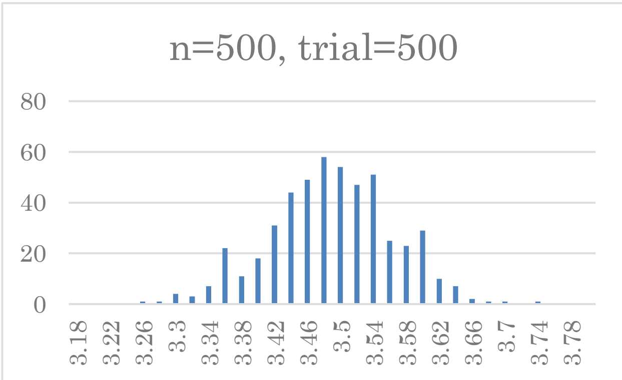


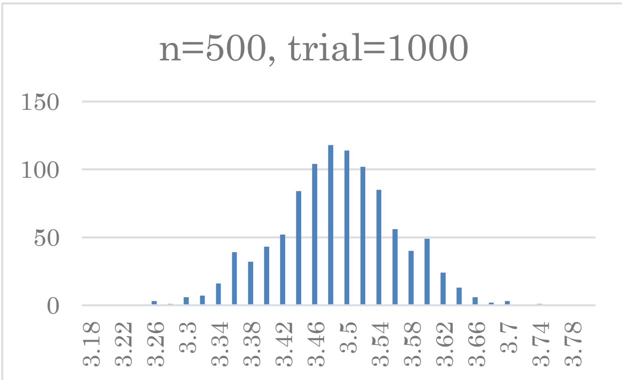


n＝500 としたとき

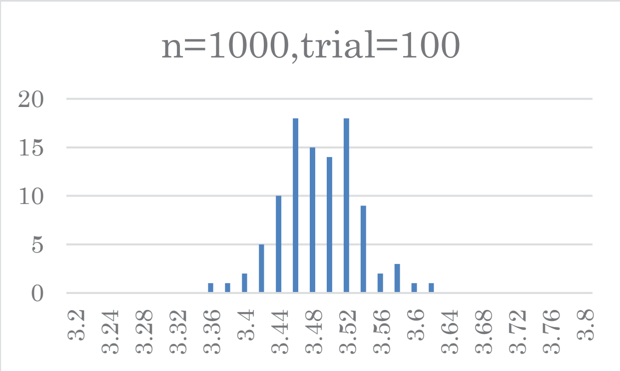


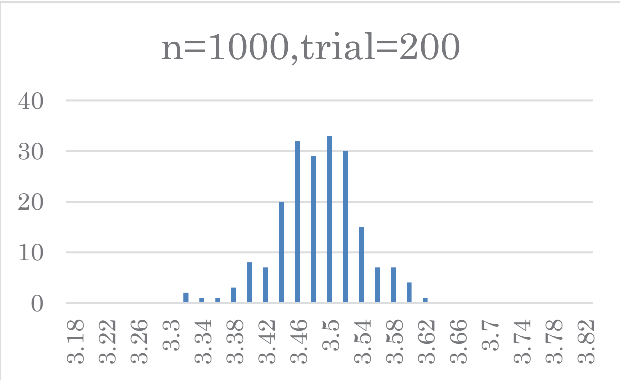


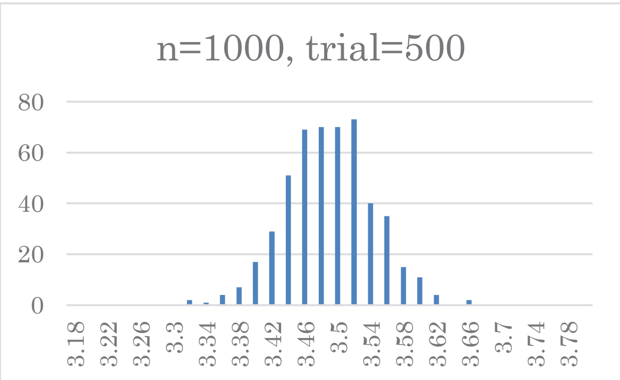


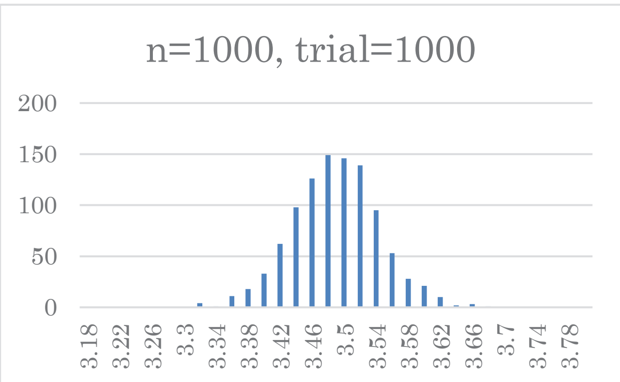


ｎ＝1000 としたとき









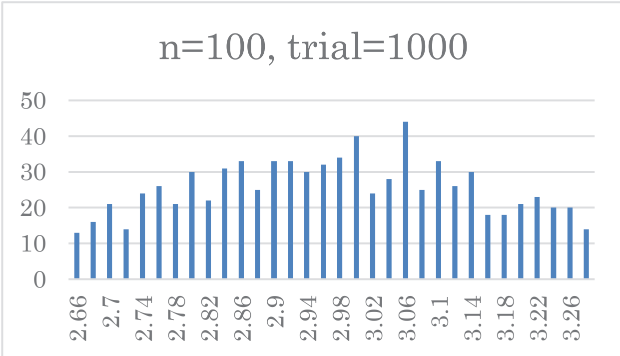
中心極限定理の通り，サンプル数が大きい平均値ほど，正規分布への収束が早い様子がわかる。

実際に Excel を使って手を動かし，定理を確認できるため，最初の準備が大変ではあるが，直感的な理解に繋げやすい。

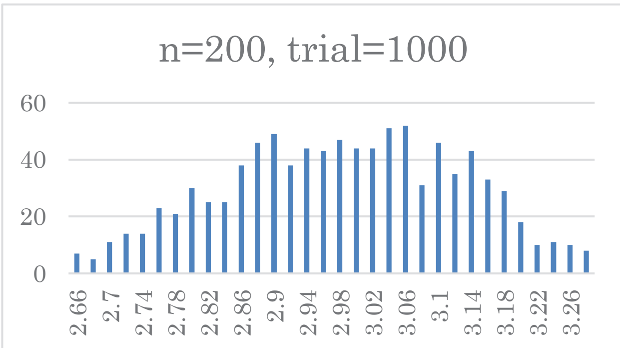
参考までに，このファイルを使い，乱数を一様乱数ではなく，χ二乗分布の乱数と t-分布の乱数を使って，同様の検証を行った。最初のデータセットを作る際の関数を変え，ヒストグラムのデータ区間を平均の真値から逆算して作ったものである。ここに試行回数 1000 回の場合のみ掲載する。

S.3-3.3 χ二乗分布の乱数を用いたシミュレーション

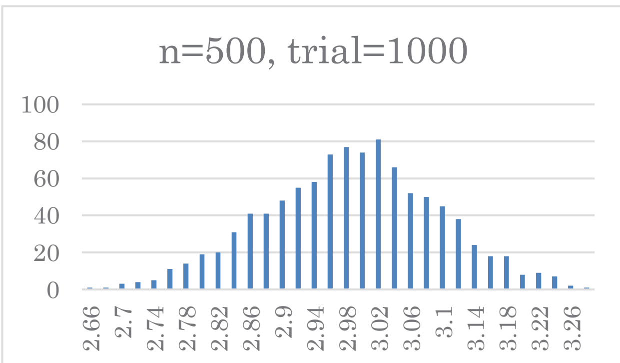
ｎ＝100 としたとき



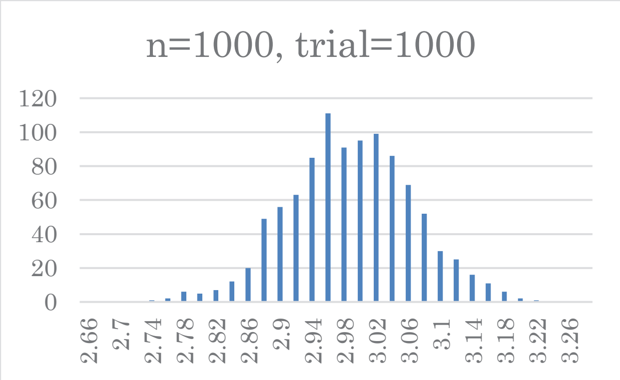
ｎ＝200 としたとき



ｎ＝500 としたとき



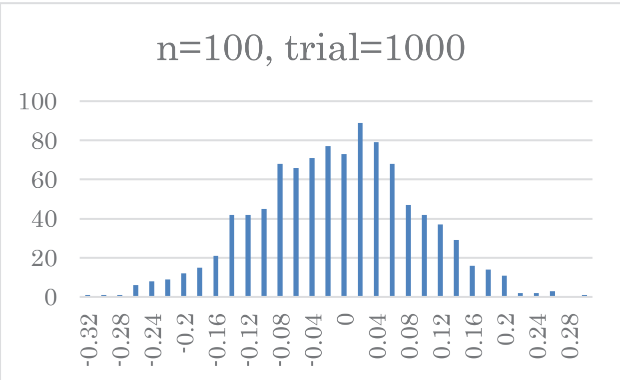
ｎ＝1000 としたとき



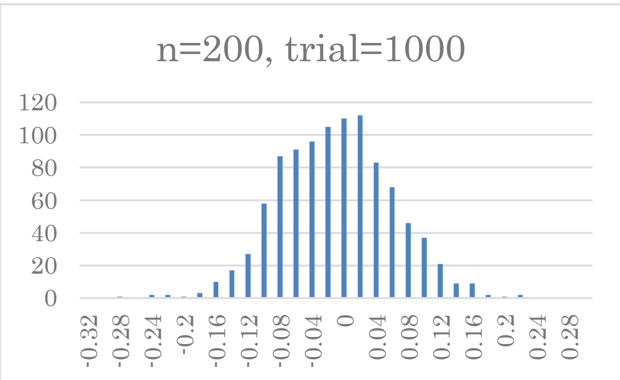
平均をとる乱数が正規性の無い χ 二乗に従う乱数の為，正規分布への収束が遅いことが分かる。

S. 3-3. 4 t-分布の乱数を用いたシミュレーション

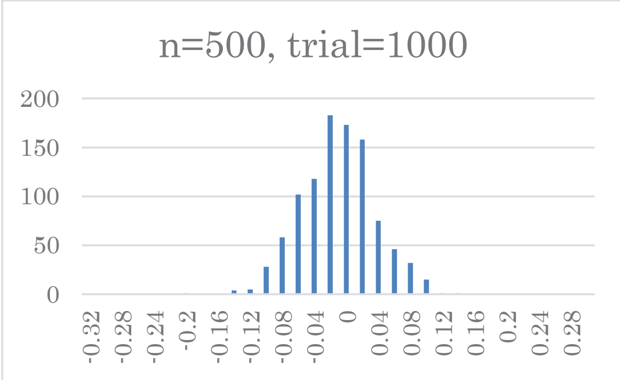
ｎ＝100 としたとき



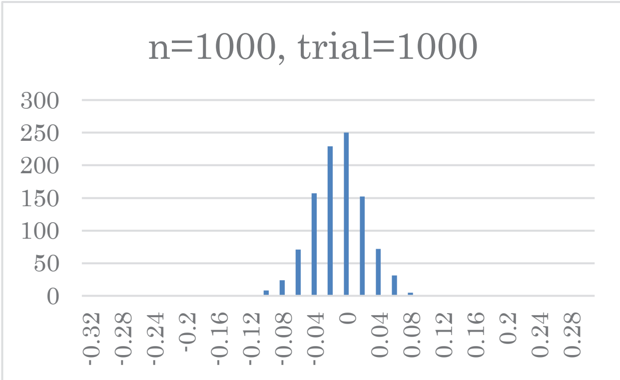
ｎ＝200 としたとき



ｎ＝500 としたとき



ｎ＝1000 としたとき



平均をとる乱数が正規性を持つ分布なので，当然ながら正規分布への収束が早い。

以上のような，Excel を用いた数値実験で，定理の確認と，その性質を考察し，正規分布の重要性を高校生にも伝えることができる教材であろう。この教材を導入する前に，正規乱数のヒストグラムや，χ 二乗分布・t-分布を乱数のヒストグラムで考える教材を実施することで，このようなシミュレーションの練習をさせておくことが望ましい。

下の URL からここで使った Excel ファイルをダウンロードできるので，活用していただいてご意見を頂きたい。

http://ur0.work/zIZr
Excel ファイルダウンロード URL

（2016　三井田）

4. おわりに

本校数学科のSSH事業に関わる研究は，学校全体のカリキュラムも数学科のカリキュラムも変更することなく実施してきた。そのため，開発した教材は中学・高校の既存のカリキュラムの中に位置づけ，通常の授業で繰り返し実践し，また，教育研究会における公開授業・研究協議やSSH数学科教員研修会を通して，他校の多くの先生方から直接意見をいただく機会を得た。今期のSSH事業は今年度が最終年となるが，今後も教材の開発を継続して行い，他校の先生方と共有し，検討を重ねることにより，本校だけでなく他校でも利用しやすい形を提案することは本校数学科の使命だと改めて感じている。